

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования, информационных и  
обслуживающих технологий  
Кафедра фундаментальной математики

УТВЕРЖДАЮ

Врио директора Института физико-  
математического образования,  
информационных и обслуживающих  
технологий

« 17 »  Е.А. Журавлева 2025

Приложение к рабочей программе учебной дисциплины

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации  
обучающихся по дисциплине

**Обобщенные функции и их приложения к теории уравнений в частных  
производных**

По направлению подготовки 01.04.01 Математика

Магистерская программа –

Квалификация выпускника магистр

Форма обучения очная

Курс 2 курс

Разработчики:

доцент Скринникова А.В.

заведующий кафедрой

фундаментальной математики

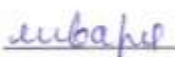
Темникова С.В.

Заведующий кафедрой

фундаментальной математики

 Темникова С.В.

Протокол

от « 13 »  2025 г., № 7

Луганск, 2025

# 1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

## 1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины (модуля) «Обобщенные функции и их приложения к теории уравнений в частных производных» и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины (модуля).

## 1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств

Цель ФОС – установить соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС ВО магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 12 (с изменениями и дополнениями).

## 1.3. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на овладение следующими компетенциями:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Профессиональные	
ПК-3 – Способен осуществлять педагогическую деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования в рамках модуля «Предметное обучение. Математика».	ПК-3.1. Демонстрирует фундаментальные знания математической теории и перспективных направлений развития современной математики, необходимые для осуществления педагогической деятельности.
	ПК-3.2. Демонстрирует убеждение в абсолютности математической истины, математического доказательства и умение осуществлять выбор рациональных методов решения поставленной задачи.

## 1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
Тема 1. Обобщенные функции и действия над ними. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений.	ПК-3	<ul style="list-style-type: none"><li>• выполнение и защита лабораторных работ;</li><li>• выполнение практических заданий;</li><li>• реферат.</li></ul>
Тема 2. Преобразования Фурье (основных функций; умеренных обобщенных функций; быстрорастущих обобщенных функций).	ПК-3	<ul style="list-style-type: none"><li>• выполнение и защита лабораторных работ;</li><li>• выполнение практических заданий;</li><li>• реферат.</li></ul>

Тема 3. Теория Пэли-Винера. Свертка и преобразование Фурье.	ПК-3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• выполнение и защита лабораторных работ;</li> <li>• выполнение практических заданий;</li> <li>• реферат.</li> </ul>
Тема 4. Проблема деления. Регуляризация. Методы вычитаний, выхода в комплексную область, метод степеней Рисса.	ПК-3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• выполнение и защита лабораторных работ;</li> <li>• реферат.</li> </ul>
Тема 5. Уравнения в выпуклом конусе. Операционное исчисление. Распространение особенностей и гладкость решений.	ПК-3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• выполнение и защита лабораторных работ;</li> <li>• реферат.</li> </ul>
Тема 6. Методы построения фундаментальных решений.	ПК-3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• выполнение и защита лабораторных работ;</li> <li>• реферат.</li> </ul>
Тема 7. Уравнения с постоянными коэффициентами в полупространстве. Краевые задачи.	ПК-3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• выполнение и защита лабораторных работ;</li> <li>• реферат.</li> </ul>
Промежуточная аттестация	ПК-3	экзамен

### 1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код и наименование компетенции	Показатели достижения компетенций (знать, уметь, владеть)
ПК-3 – Способен осуществлять педагогическую деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования в рамках модуля «Предметное обучение. Математика».	<p><b>знать:</b> основные понятия теории уравнений в частных производных; основные понятия и теоремы теории обобщенных функций и их приложения к теории уравнений в частных производных;</p> <p><b>уметь:</b> применять знания теории обобщенных функций и их приложений к теории уравнений в частных производных в педагогической деятельности;</p> <p><b>владеть навыками</b> решения классических задач теории уравнений в частных производных, необходимыми для осуществления педагогической деятельности.</p>

### 1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

#### Система оценивания учебных достижений студентов

### очной формы обучения

Вид текущей учебной работы	Количество баллов
3 семестр	
Выполнение и защита лабораторных работ	20
Выполнение практических заданий	20
Реферат	10
Экзамен (письменный)	50
Итого:	100

### Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбалльная система оценивания экзамена	100-балльная шкала	Буквенная шкала, соответствующая 100-балльной шкале	Система оценивания зачета
Отлично	90–100	<b>A</b> – отлично – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	83–89	<b>B</b> – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения большинства из них оценено числом баллов, близким к максимальному	
Хорошо	75–82	<b>C</b> – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками	
Удовлетворительно	63–74	<b>D</b> – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетворительно	50–62	<b>E</b> – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично;	

		некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов, близким к минимальному	
Неудовлетворительно	<b>21–49</b>	<b>FX</b> – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение качества выполнения учебных заданий	Не зачтено
Неудовлетворительно	<b>0–20</b>	<b>F</b> – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	

### 1.7. Образец оформления экзаменационного билета

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

2025/2026 учебный год

ИНСТИТУТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ,  
ИНФОРМАЦИОННЫХ И ОБСЛУЖИВАЮЩИХ ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

экзамен (письменный) по дисциплине  
«Обобщенные функции и их приложения к теории уравнений в частных  
производных»

Код/названия направлений подготовки **01.04.01 Математика**  
ОФО  
3 семестр

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 0

1. Преобразование Фурье финитных функций. Замыкание преобразования Фурье по непрерывности.
2. Инвариантные фундаментальные решения уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами.
3. Найдите фундаментальные решения обыкновенного дифференциального оператора:  $L = \frac{d^2}{dx^2} + l^2$ .
4. Найдите все производные функции  $f(x) = H(x)\sin x$ .

Утверждено на заседании кафедры фундаментальной математика, протокол  
№ от 2025 года.

Заведующий кафедрой  
фундаментальной математики

\_\_\_\_\_ С.В. Темникова

Экзаменатор

\_\_\_\_\_ С.В. Темникова

## 2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

### 2.1. Оценочные средства текущего контроля (типовые)

#### Примерные практические задания:

1. Докажите, что  $d$ -функция является непрерывным линейным функционалом на пространстве основных функций.

2. Докажите, что для всякой основной функции  $j$  справедливо равенство

$$\text{v.p.} \int_{-\Gamma}^{+\Gamma} \frac{j(x)}{x} dx = \text{v.p.} \int_{-\Gamma}^{+\Gamma} \frac{j(x) - j(0)}{x} dx.$$

3. Докажите следующие предельные соотношения в  $D'(\mathbb{R})$ :

$$\text{а) } \frac{1}{2\sqrt{pe}} e^{-\frac{x^2}{4e}} \rightarrow d(x) \text{ при } e \rightarrow +0. \text{ б) } \frac{1}{p} \frac{e}{x^2 + e^2} \rightarrow \pm d(x) \text{ при } e \rightarrow \pm 0.$$

4. Докажите, что функция  $f_e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , заданная формулой

$$f_e(x) = \begin{cases} \frac{1}{2e}, & \text{если } |x| \leq e, \\ 0, & \text{если } |x| > e, \end{cases}$$

стремится в  $D'(\mathbb{R})$  к  $d$ -функции при  $e \rightarrow +0$ .

5. Найдите пределы в  $D'(\mathbb{R})$  последовательностей функций  $f_1, f_2, \dots, f_k, \dots$  и  $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots$ , если

$$f_k(x) = \frac{k}{\sqrt{p}} e^{-k^2 x^2} \quad \text{и} \quad F_k(x) = \int_{-\Gamma}^x f_k(x) dx.$$

6. Докажите, что

$$\text{P} \cos \frac{kx}{x} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \text{ где } \left( \text{P} \cos \frac{kx}{x}, \varphi \right) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{kx}{x} \varphi(x) dx.$$

7. Пусть  $n > 1$ . Докажите, что функция  $f_e : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , заданная формулой

$$f_e(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{k}{(2\sqrt{pe})^n} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{4pe}},$$

стремится в  $D'(\mathbb{R}^n)$  к  $d$ -функции при  $e \rightarrow +0$ .

8. Тракуя несобственный интеграл как предел в  $D'(\mathbb{R})$  соответствующих собственных интегралов, докажите равенства:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^{+\Gamma} \cos xy dy &= d(x); & \text{б) } \int_0^{+\Gamma} e^{ixy} dy &= d(x). \\ \text{в) } x \int_0^{+\Gamma} y J_0(xy) dy &= d(x), \text{ где } J_0(x) = \frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{\cos xz}{\sqrt{1-z^2}} dz. \end{aligned}$$

функция Бесселя с нулевым значком.

9. Тракуя несобственный интеграл как предел в  $D'(\mathbb{R}^n)$  соответствующих собственных интегралов, докажите равенство

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x,y)} dy = d(x).$$

где  $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$  — скалярное произведение в  $\mathbf{R}^n$ .

10. Трактую сумму ряда как предел последовательности его частичных сумм, докажите равенство в  $D'(R)$ :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\Gamma}^{+\Gamma} e^{-ixk} = d(x).$$

11. Считая  $a$  вещественным числом, отличным от нуля, докажите следующие равенства в  $D'(R)$ :

$$\text{а) } d(ax) = \frac{d(x)}{|a|}. \quad \text{б) } d(x^2 - a^2) = \frac{d(x-a) + d(x+a)}{2|a|}.$$

12. Докажите равенство

$$\sum_{k=-\Gamma}^{+\Gamma} e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-\Gamma}^{+\Gamma} d(x - k).$$

13. Докажите предельное соотношение в  $D'(R)$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\Gamma}^{+\Gamma} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \otimes \sum_{k=-\Gamma}^{+\Gamma} d(x + 2\pi k).$$

14. Докажите, что для любого натурального  $m$  то в  $D'(R)$  справедливо равенство  $x^m \mathcal{P} \frac{1}{x} = x^{m-1}$ .

15. Докажите, что при любом выборе постоянных  $c_k$  функция  $F(x) = \sum_{k=-\Gamma}^{+\Gamma} c_k d(x - \pi k)$  является решением уравнения  $(\sin x)F(x) = 0$ .

16. Докажите, что для того, чтобы обобщённая функция  $F \in D'(R)$  удовлетворяла соотношению  $xF = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы  $F$  была пропорциональна  $d$ -функции, т. е. чтобы нашлась постоянная  $C$  такая, что  $F = Cd$ .

17. Докажите равенство  $d\check{X}(-x) = d\check{X}(x)$ .

18. Для любой обобщённой функции  $F \in D'(R)$  докажите равенство

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

19. Найдите следующие пределы в  $D'(R)$ :

$$\text{а) } \frac{d(x+h) - d(x-h)}{2h}. \quad \text{б) } \frac{d(x+2h) - d(x-2h) - 2d(x)}{4h^2}.$$

20. Докажите, что в  $D'(R)$  для любых натуральных  $k$  и  $m$  справедливы равенства

$$x^k d^{(m)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!}, & \text{если } 0 \leq k \leq m, \\ 0, & \text{если } k > m, \end{cases}$$

В частности проверьте равенство  $xd\check{X}(x) = -d(x)$ .



21. Докажите, что обобщённые функции  $d, d', d'', \dots, d^{(k)}$  линейно независимы над полем комплексных чисел.

22. Докажите, что если функция  $a$  бесконечно дифференцируема в  $\mathbb{R}$ , то для любой обобщённой функции  $F \in D'(\mathbb{R})$  справедлива формула Лейбница для дифференцирования произведения  $aF$ :

$$\frac{d^n aF}{dx^n} = \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^{n-m} a}{dx^{n-m}} \frac{d^m F}{dx^m},$$

где  $C_n^m$  — число сочетаний из  $n$  по  $m$ . В частности, докажите справедливость формулы  $(aF)' = a'F + aF'$

23. Вычислите  $f^{(k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , для следующих функций:

a)  $f(x) = H(x)$ .

b)  $f(x) = \operatorname{sign} \sin x$ .

24. Докажите равенства

a)  $|\sin x|' = |\sin x| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} d(x - pj).$  b)

$|\cos x|' = |\cos x| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} d(x - \frac{\pi}{2} - pj).$

25. Найдите все производные следующих функций:

a)  $f(x) = xH(x)$ .

b)  $f(x) = x^2 H(1 - x^2)$ .

26. Докажите равенства

a)  $\frac{d}{dx} \ln |x| = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - pj)$ .

b)  $\frac{d}{dx} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - pj) = - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - pj)$ , где  $\left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - pj), \varphi \right) = \operatorname{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx$ .

27. Докажите, что для любого натурального  $m$  в  $D'(\mathbb{R})$  справедливо равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (2\pi i k)^m e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d^{(m)}(x - k).$$

28. Докажите, что стоящие справа обобщённые функции являются решениями в  $D'(\mathbb{R})$  следующих уравнений при произвольном выборе параметров  $c_1, c_2, c_3$ .

a)  $x F' = 1$ ,  $F = c_1 + c_2 H(x) + \ln |x|$ ,

b)  $x^2 F' = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - pj)$ ,  $F = c_1 + c_2 H(x) + c_3 d(x) - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - pj}$ .

29. Докажите следующие равенства в  $D'(\mathbb{R}^2)$ :

a)  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 2\pi d(x, y)$ .

b)  $\frac{1}{t} - \frac{1}{x^2} = d(t, x)$ , где  $F(x, y) = \frac{H(t)}{2\sqrt{pt}} e^{-x^2/4t}$ .

30. Вычислите следующие свёртки в  $D'(\mathbb{R})$ :

- a)  $d(x-a) * F(x)$ , где  $F \in D'(R)$ .  
 б)  $d^{(m)} * F, * F$ , где  $F \in D'(R)$ .
31. Вычислите следующие свёртки в  $D'(R^n)$ :  
 а)  $H(x) * (xH(x))$ . б)  $(H(x)\sin(x)) * (H(x)\sin(x))$ .
32. Найдите фундаментальные решения следующих обыкновенных дифференциальных операторов:  
 а)  $L = \frac{d}{dx} - I$ . б)  $L = \frac{d}{dx} - I \frac{d}{dx}$ .
33. Докажите следующие равенства в  $S'(R^n)$ :  
 а)  $F_{\pm}[\delta(x-x_0)](y) = (2\pi)^{-n/2} e^{mi(x_0,y)}$ . б)  $F_{\pm}[D^{\alpha}\delta(x)](y) = (2\pi)^{-n/2} (\pm iy)^{\alpha}$ .
34. Найдите прямое и обратное преобразования Фурье следующих функций из  $S'(R)$ :  
 а)  $H(x)e^{-ax}$ , где  $a > 0$ . б)  $\sin x$ .
35. Пусть  $f$  и  $g$  локально интегрируемы в  $R$ , причём  $f(x) = g(x) = 0$  для всех  $x < 0$ . Докажите, что свёртка  $f * g$  определена и задаётся формулой
- $$(f * g)(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)dy.$$

## 2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

### Вопросы к экзамену

- Дифференцирование обобщенных функций.
- Замена переменных в обобщенных функциях.
- Носитель обобщенных функций.
- Сингулярный носитель обобщенных функций.
- Свертка обобщенных функций. Граничные значения аналитических функций.
- Пространство умеренных распределений.
- Фундаментальные решения. Примеры фундаментальных решений.
- Распространение волн. Построение фундаментальных решений обыкновенных дифференциальных уравнений.
- Теорема о среднем.
- Преобразование Фурье быстро-убывающих функций.
- Свойства преобразования Фурье.
- Преобразование Фурье финитных функций. Замыкание преобразования Фурье по непрерывности.
- Методы вычисления преобразования Фурье.
- Преобразование Фурье финитных обобщенных функций.
- Умеренные распределения с носителем в конусе.
- Экспоненциально растущие распределения с носителем в конусе.
- Свертка и преобразование Фурье.
- Проблема деления в классах быстро-растущих распределений.

19. Проблема деления в классах экспоненциально растущих обобщенных функций. Лестница Хермандера.
20. Проблема деления в классах умеренных распределений.
21. Уравнения в конусе. Операционное исчисление.
22. Дифференциально-разностные уравнения на полуоси.
23. Аналитическое продолжение произвольной степени многочлена второго порядка по параметру, являющемуся показателем степени.
24. Инвариантные фундаментальные решения уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами.
25. Нахождение регулярной части инвариантного фундаментального решения.
26. Построение формального фундаментального решения.
27. Регуляризация формального фундаментального решения.
28. Общее решение уравнения с постоянными коэффициентами в полупространстве.
29. Классификация уравнений в полупространстве. Примеры уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов.
30. Неоднородные уравнения в полупространстве. Краевые задачи для неоднородных уравнений.